УДК 517.382:531

І. І. ЛЕСЮК, Л. О. ЛИСОВА
Хмельницький національний університет

ЗАКОН РОЗПОДІЛУ ФІЗИЧНОЇ ВЕЛИЧИНИ З НЕВИЗНАЧЕНИМИ КООРДИНАТАМИ НА ВІДРІЗКУ

В статті розглянуті функції розповсюдження величин в одновимірному просторі, кількісні значення яких визначаються невласними інтегралами на додатній області інтегрування. Наведені умови, за яких координати центрів величин невизначені на відрізку.

In the paper there have been considered the distribution functions of the values in the one-dimensional space, quantitative values of which are determined with the improper integrals on the positive integration domain. Stated the conditions, by which the coordinates of the centers of the values are non-determined on the segment.

В статті розглянуті функції розповсюдження величин в одновимірному просторі, кількісні значення яких визначаються невласними інтегралами на додатній області інтегрування. Наведені умови, за яких координати центрів величин невизначені на відрізку.

Розглянемо фізичну величину, розповсюджену в додатній області осі $0x$ за законом

$$y = \sin x^2 + \cos x^2 = \sqrt{2}\cdot\cos\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right), \qquad x \in [0, \infty), \tag{1}$$

для якої є інтервали з різними знаками значень ординат. Такими величинами можуть бути інтенсивності сил, паралельних осі $0y$ та інше. Отже, в декартових координатах між лініями $y_1 = 0$ і $y_2 = \sqrt{2}\cdot\cos\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right)$ отримуємо фігуру площею S.

Координати x_c центра такої площі визначаються [1] за формулою

$$x_c = \frac{S_x}{S}, \quad S = \int_0^\infty (y_2 - y_1)\,dx, \quad S_x = \int_0^\infty x\cdot(y_2 - y_1)\cdot dx. \tag{2}$$

Для обчислення S використаємо відомі [2] значення інтегралів

$$S = \int_0^\infty \sqrt{2}\cdot\cos\left(x^2 - \frac{\pi}{2}\right)dx = \int_0^\infty \left(\sin x^2 + \cos x^2\right)dx = \int_0^\infty \sin x^2\cdot dx + \int_0^\infty \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}} + \sqrt{\frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{3}$$

Знайдемо значення S_x:

$$S_x = \int_0^\infty x\cdot\sqrt{2}\cos\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty \cos\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right)\cdot d\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^\infty =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin\infty - \sin\left(0 - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin\infty - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\infty + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Оскільки $\sin\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right)$ обмежена функція $\left[-1 \le \sin\left(x^2 - \frac{\pi}{4}\right) \le +1\right]$, то значення S_x отримаємо у вигляді:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \le S_x \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \qquad \frac{1-\sqrt{2}}{2} \le S_x \le \frac{1+\sqrt{2}}{2}. \tag{4}$$

При значеннях (3) і (4) із (2) отримуємо

$$\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) : \sqrt{\frac{\pi}{2}} \le \frac{S_x}{S} \le \frac{1+\sqrt{2}}{2} : \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot\pi}} \le x_c \le \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot\pi}}. \tag{5}$$

Звідси маємо:

$$(x_c)_{\min} = \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot\pi}} \approx -0{,}16; \qquad (x_c)_{\max} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot\pi}} \approx 0{,}95.$$

Отже, значення x_c невизначене, але знаходиться на відрізку $[-0{,}16; 0{,}95]$, що принципово відрізняється від результатів досліджень в попередніх працях $[3]$, де отримані невизначеності у вигляді $x_c = \infty$.

Узагальнимо функцію (1) у вигляді:

$$y = A\cdot\sin x^2 + B\cdot\cos x^2 = \sqrt{A^2 + B^2}\cdot\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x^2 + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot\cos x^2\right). \tag{6}$$

Нехай $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sin\varphi;\qquad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos\varphi$.

Тоді отримаємо

$$tg\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{A}{B},\qquad \varphi=arctg\frac{A}{B}\,. \tag{7}$$

$$y=\sqrt{A^2+B^2}\left(\sin x^2\cdot\sin\varphi+\cos x^2\cdot\cos\varphi\right)=\sqrt{A^2+B^2}\cdot\cos\left(x^2-\varphi\right). \tag{8}$$

Для (8), аналогічно як для (1), знаходимо значення S і S_x:

$$S=\int_0^\infty\sqrt{A^2+B^2}\cdot\cos\left(x^2-\varphi\right)dx=\int_0^\infty\left(A\sin x^2+B\cos x^2\right)dx=A\sqrt{\frac{\pi}{8}}+B\sqrt{\frac{\pi}{8}}=\left(A+B\right)\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,.$$

$$S_x=\int_0^\infty x\cdot\sqrt{A^2+B^2}\cdot\cos\left(x^2-\varphi\right)dx=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2}\int_0^\infty\cos\left(x^2-\varphi\right)\cdot d\left(x^2-\varphi\right)=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2}\sin\left(x^2-\varphi\right)\Big|_0^\infty=$$

$$=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2}\left(\sin\infty+\sin\varphi\right)=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{2}\left(\pm1+\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(A\pm\sqrt{A^2+B^2}\right).$$

При таких значеннях S і S_x отримаємо інтервал невизначеності координати x_c у вигляді:

$$\frac{\frac{1}{2}\left(A-\sqrt{A^2+B^2}\right)}{\left(A+B\right)\sqrt{\frac{\pi}{8}}}=\frac{\sqrt{2}\left(A-\sqrt{A^2+B^2}\right)}{\left(A+B\right)\cdot\sqrt{\pi}}\le x_c=\frac{S_x}{S}\le\frac{\frac{1}{2}\left(A+\sqrt{A^2+B^2}\right)}{\left(A+B\right)\cdot\sqrt{\frac{\pi}{8}}}=\frac{\sqrt{2}\left(A+\sqrt{A^2+B^2}\right)}{\left(A+B\right)\sqrt{\pi}}\,,$$

отже,

$$\frac{\sqrt{2}\left(A-\sqrt{A^2+B^2}\right)}{\left(A+B\right)\sqrt{\pi}}\le x_c\le\frac{\sqrt{2}\left(A+\sqrt{A^2+B^2}\right)}{\left(A+B\right)\sqrt{\pi}}\,. \tag{9}$$

При $A=B=1$ із (9) маємо (5).

Із (9) отримуємо довжину (l) інтервалу і координату його середини $\left(x_c\right)_{cp}$.

$$l=\frac{\sqrt{2}\left(A+\sqrt{A^2+B^2}\right)}{\left(A+B\right)\sqrt{\pi}}-\frac{\sqrt{2}\left(A-\sqrt{A^2+B^2}\right)}{\left(A+B\right)\sqrt{\pi}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{A+B}\cdot2\sqrt{A^2+B^2}\;; \tag{10}$$

$$\left(x_c\right)_{cp}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}\left(A+\sqrt{A^2+B^2}\right)}{\left(A+B\right)\sqrt{\pi}}+\frac{\sqrt{2}\left(A-\sqrt{A^2+B^2}\right)}{\left(A+B\right)\sqrt{\pi}}\right]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{A+B}\cdot A\,. \tag{11}$$

Звідси маємо безрозмірну характеристику інтервала:

$$\frac{\left(x_c\right)_{cp}}{l}=\frac{A}{2\sqrt{A^2+B^2}}\,. \tag{12}$$

Проаналізуємо (9) – (12) залежно від значень A і B:

1) при $A=0,\ B\neq0$ маємо

$$\left(-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)\le x_c\le\left(+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right),\qquad l=2\sqrt{\frac{2}{\pi}},\qquad \left(x_c\right)_{cp}=0,\qquad \frac{\left(x_c\right)_{cp}}{l}=0\;; \tag{13}$$

2) при $A\neq0,\ B=0$ маємо

$$0\le x_c\le2\sqrt{\frac{2}{\pi}},\qquad l=2\sqrt{\frac{2}{\pi}},\qquad \left(x_c\right)_{cp}=\sqrt{\frac{2}{\pi}},\qquad \frac{\left(x_c\right)_{cp}}{l}=\frac{1}{2}\,; \tag{14}$$

3) при $A\neq0,\ B\neq0$: нехай $B=k\cdot A$, де $k\neq0$, маємо

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1-\sqrt{1+k^2}}{1+k}\le x_c\le\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1+\sqrt{1+k^2}}{1+k}\,,\qquad l=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{2\sqrt{1+k^2}}{1+k}, \tag{15}$$

$$\left(x_c\right)_{cp}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+k}\,,\qquad \frac{\left(x_c\right)_{cp}}{l}=\frac{1}{2\sqrt{1+k^2}}\;;$$

4) при $A\neq0,\ B\neq0$: нехай $A=p\cdot B=\frac{1}{k}\cdot B$, маємо

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{p-\sqrt{p^2+1}}{p+1} \le x_c \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{p+\sqrt{p^2+1}}{p+1}, \qquad l=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{2\sqrt{p^2+1}}{p+1}, \tag{16}$$

$$\left(x_c\right)_{cp}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{p}{p+1}, \qquad \frac{\left(x_c\right)_{cp}}{l}=\frac{p}{2\sqrt{p^2+1}}.$$

Із (13) і (14) видно, що відсутність в (6) доданка $B\cdot\cos x^2$ сприяє зміщенню інтервала невизначеності вправо, тобто в додатному напрямі осі $0x$. Наявність доданка $B\cdot\cos x^2$ є причиною того, що інтервал невизначеності x_c розповсюджується на область від'ємних значень осі $0x$.

Із (15) і (16) бачимо, що тільки вид виразу для значення (l) залишається незмінним.

Список використаних джерел

1. Никитин Н. Н. Курс теоретической механики / Никитин Н. Н. – М. : Высшая школа, 1990. – 607 с.
2. Бронштейн И. Н. Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука, 1986. – 544 с.
3. Лесюк І. І. Нескінченність координат центра маси, яка визначається невласним інтегралом / І. І. Лесюк, Л. О. Лисова // ПММ-2002 : тези доп. Міжнар. науково-техн. конф. – Хмельницький : ТУП, 2002. – 75 с.